Tökéletes számok

Róka Sándor, Nyíregyháza

Erdős Pál szerint: „Máig is teljesen reménytelen annak az eldöntése, hogy van-e végtelen sok $2^p - 1$ alakú prímszám, ahol *p* prímszám. ***Azt szoktam mondani, hogy ez a kérdés talán nem a legsürgősebb, amelyet az emberiségnek meg kell oldani, de mindenesetre nincs nála nehezebb.***” Ha sikerül bizonyítani, hogy végtelen sok ilyen prím van, abból *Euklidesz* egyik tétele alapján adódna az, hogy végtelen sok tökéletes szám van.

Az ókori görögök kezdték vizsgálni a tökéletes számokat, és az érdekes eredmények mellett megoldatlan kérdések is maradtak ránk. A matematikai tulajdonságokon túl vallásos jelentőséget is tulajdonítottak a tökéletes számoknak. Például *Szent Ágoston* azt írja Az *Isten városáról* c. művében, Isten azért teremtette 6 nap alatt a Földet (bár egy pillanat alatt megtehette volna), mert a 6 tökéletes szám. A Hold is hasonló okból kerüli meg a Földet éppen 28 nap alatt.

Érdekes *Mersenne* megjegyzése: „…világos, milyen ritkák a tökéletes számok, s mennyire méltán hasonlítanak a tökéletes férfiakhoz.” Ezt a gondolatot összevethetjük azzal a fontos kérdéssel, hogy van-e végtelen sok tökéletes szám.

2003 augusztusában az egyik hazai folyóiratban ezt olvastam: „Nemrégiben egy newnaili 13. osztályos gimnáziumi tanuló megtalálta az első páratlan tökéletes számot. Ez a $2\,812\,644\,884\,765\,625$.” A szeptemberi tanévnyitón ezt megmutattam T. Zs. kollégánknak, aki az ünnepi megnyitó alatt, számológép nélkül bebizonyította, hogy ez a szám nem tökéletes. (Egy későbbi lapszámban elnézést kértek a téves közlésért.) A páros tökéletes számokról *Euklidesz* és *Euler* adott pontos leírást. Azt, hogy van-e páratlan tökéletes szám, még most sem tudjuk.

A görögök vezették be a tökéletes szám fogalmát. Egy szám tökéletes, ha a tőle kisebb osztóinak összege maga a szám.

Tökéletes szám a 6 és a 28 is: $6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Bővebben olvashatunk a tökéletes számokról az interneten ezekben a szakdolgozatokban:
Karlik Zsuzsanna: A tökéletes számok, (ELTE, 2009, témavezető Freud Róbert)
Orthmayr Flóra: A tökéletes számok és társaik, (ELTE, 2012, témavezető Freud Róbert)

Miért nem tökéletes?

(1) 12345

(2) 1234567

(3) $3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^8$

(4) $5^6 \cdot 7^7 \cdot 11^8$

(5) $p^5 \cdot q^6$, ahol p és q prímek, és $|p - q| = 2$

(6) $2\,812\,644\,884\,765\,625$

A cikk végén belátjuk, hogy ezen számok egyike sem tökéletes.

Előbb oldjuk meg a következő feladatokat:

1. Mennyi
a) az 1000 osztóinak összege?
b) az 1000 páros osztóinak összege?

2. Jelölje *n* osztóinak összegét $\sigma(n)$, azaz $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.
Mutassuk meg, ha *a* és *b* relatív prímek, akkor $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$.

3. Hány olyan szám van 20-ig, ill. 1000-ig, amely szám osztóinak összege páratlan?

4. Melyek azok a *k* pozitív egész számok, amelyekre $2 \cdot 3^k$ tökéletes szám? (*KöMaL*)

5. Különböző páratlan prímek szorzata lehet-e tökéletes szám?

6. Van-e négyzetszám a tökéletes számok között?

7. Van-e olyan szám, amelynek páros számú páratlan osztója van, és a páros osztóinak száma páratlan?

8. (*Euklidesz, Euler*) Az *n* páros szám pontosan akkor tökéletes, ha $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám.

9. Mutassa meg, hogy a páros tökéletes számok utolsó számjegye 6 vagy 8.

10. Mutassa meg, ha az *n* tökéletes szám mindkét szomszédja prímszám, akkor $n = 6$.

11. Van-e olyan 6-nál nagyobb tökéletes szám, amely osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel?

12. Melyek azok a tökéletes számok, melynek prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám?

13. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan tökéletes szám (ha van ilyen) 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

14. Mutassuk meg, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább három különböző prímosztója van.

15. Mutassuk meg, hogy nincs olyan páratlan tökéletes szám, amely osztható a 3, 5 és 7 prímekkel.

16. Mutassuk meg, hogy a páratlan tökéletes számok $n = (4k + 1) \cdot m^2$ alakúak,
ahol $4k + 1$ prímszám.

17. ***a)*** Lássuk be, hogy $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$. Innen következik, hogy egy tökéletes szám osztóinak reciprokait összeadva 2-t kapunk, azaz ha *n* tökéletes, akkor $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$, hiszen $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$.
b) Bizonyítsuk be, hogy van olyan *n* egész, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > 10$.
c) Igazoljuk, hogy ha $m|n$, akkor $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(m)}{m}$.
d) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan *n* szám van, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m}$, ha $n > m$.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{5}{3}$, akkor $5n$ páratlan tökéletes szám. (*Weiner*, 2000)

Megoldások

1. Mennyi ***a)*** az 1000 osztóinak összege; ***b)*** az 1000 páros osztóinak összege?

Megoldás. ***a)*** 1000 osztóinak összege: $\left(1+2+2^2+2^3\right)\cdot\left(1+5+5^2+5^3\right)=2340$, hiszen a zárójelek felbontása után megkapjuk 1000 mindegyik osztóját, és mindegyik osztót egyszer.
b) 1000 osztóinak összegéből vegyük a el a páratlan osztók összegét, és megmarad 1000 páros osztóinak összege: $2340-(1+5+5^2+5^3)=2340-156=2184$.
Másképp is számolhatunk: a keresett összeg az 500 osztói összegének kétszerese:
$2\cdot\left(1+2+2^2\right)\cdot\left(1+5+5^2+5^3\right)=2\cdot 1092=2184$.

2. Jelölje n osztóinak összegét $\sigma(n)$, azaz $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$.
Mutassuk meg, ha a és b relatív prímek, akkor $\sigma(a\cdot b)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$.

Megoldás. Ennek átgondolása önálló feladat.

Egy példa:
$\sigma(210)=\sigma(14\cdot 15)=\sigma(14)\cdot\sigma(15)=(1+2+7+14)\cdot(1+3+5+15)=24^2$.
Adódik egy kérdés:
Lehet-e $\sigma(n)$ értéke végtelen sokszor négyzetszám?

3. Hány olyan szám van ***a)*** 20-ig, ***b)*** 1000-ig, amely szám osztóinak összege páratlan?

Megoldás. a) Nézzük meg a számokat 20-ig, az 1, 2, 4, 8, 16, a 9, és a 18 számok osztóinak összege páratlan. **Válasz:** 7
b) Most nyilván nem vizsgáljuk meg a számokat egyesével 1000-ig. Az általános kérdést kell tisztázni: *Melyek azok a számok, melyeknél az osztók összege páratlan?*
Egy páratlan n szám minden osztója páratlan. Ezen páratlan osztók összege akkor lesz páratlan, ha páratlan sok számot adunk össze. Mint tudjuk, a négyzetszámoknak és csakis nekik van páratlan sok osztója. Tehát a páratlan számok közül a négyzetszámok azok, melyek osztóinak összege páratlan.
Nézzük a másik esetet, ha az n szám páros: $n=2^a\cdot b$, ahol b páratlan. Az n szám osztóinak összege úgy lesz páratlan, ha a páratlan osztóinak összege páratlan, azaz a b szám osztóinak összege páratlan. Ezt vizsgáltuk az előbb, és azt kaptuk, hogy a b páratlan szám négyzetszám. Emiatt az $n=2^a\cdot b$ szám vagy egy négyzetszám 2-szerese, vagy pedig négyzetszám, attól függően, hogy a 2^a hatványban a kitevő páratlan, vagy páros.
Azt kaptuk, hogy az a^2 és a $2a^2$ alakú számok azok, melyek osztóinak összege páratlan. 1000-ig 31 négyzetszám van, és 22 olyan szám, mely $2a^2$ alakú. A keresett számok száma $31+22=53$.
Válasz: 53
Másképp is megtaláljuk a választ.

$$\sigma(n)=(1+p+\dots+p^\alpha)\cdot\left(1+q+\dots+q^\beta\right)\cdot(1+r+\dots+r^\gamma)\cdot\dots\cdot\left(1+s+\dots+s^\delta\right)$$

Ez a szorzat akkor páratlan, ha a tényezők mindegyike páratlan. Emiatt páratlan prímek esetén a zárójelben lévő utolsó tag kitevője páros, míg páros prím (azaz a 2) esetén a megnevezett kitevő lehet páros, lehet páratlan. Tehát az $n=p^\alpha\cdot q^\beta\cdot r^\gamma\cdot\dots\cdot s^\delta$ szám prímtényezős alakjában a 2 kivételével minden prím kitevője páros, és a 2 kitevője tetszőleges.

Megjegyzés: A ***b)*** feladatra kapott válasz miatt 1000-ig legalább $500 - 53 = 447$ olyan szám van, amely nem lehet a $\sigma(n)$ értékkészletében. Belátható, hogy végtelen sok olyan szám van, amelyet nem kaphatunk meg egy szám osztóinak összegeként.

4. Melyek azok a *k* pozitív egész számok, amelyekre $2 \cdot 3^k$ tökéletes szám? (*KöMaL*)

Megoldás: Ez a *KöMaL* **B.4553.** feladata, a megoldást megtaláljuk az interneten, illetve a *KöMaL* –ban. (Számoljuk $\sigma(n)$-t. Csak egy megoldás van, és ez a 6.)

5. Különböző páratlan prímek szorzata lehet-e tökéletes szám?

Megoldás: Az $n = p \cdot q \cdot \cdots \cdot r$ szám osztóinak összege a szám 2-szerese, azaz
$(p + 1)(q + 1) \cdots (r + 1) = 2pq \cdots r$
A bal oldalon mindegyik zárójeles tényező páros, míg a jobb oldal osztható 2-vel, ám 4-gyel nem, ezért a bal oldalon csak egy tényező lehet: $p + 1 = 2p$ lehet. Ez nem ad megoldást.

6. Van-e négyzetszám a tökéletes számok között?

Megoldás: Tehetünk egy fontos észrevételt: ***Egy négyzetszám osztóinak összege páratlan.*** Ez kiderült a **3. feladat** megoldásából.
Mivel egy tökéletes szám osztóinak összege a szám kétszerese, azaz páros szám, így egy négyzetszám nem lehet tökéletes.

7. Van-e olyan szám, amelynek páros számú páratlan osztója van, és a páros osztóinak száma páratlan?

Megoldás: Legyen a keresett szám $n = 2^k \cdot b$, ahol *b* páratlan. A páratlan osztók száma páros, legyen ez *m*. A páros osztókat úgy kapom, hogy veszek egy páratlan osztót, és ezt szorzom a 2, 4, …, 2^k számokkal. Ezért a páros osztók száma az *m* többszöröse ($= m \cdot k$), azaz egy páros szám többszöröse, és ez nem lehet páratlan. Tehát nincs, az elvárásoknak megfelelő szám.

8. (*Euklidesz, Euler*) Az *n* páros szám pontosan akkor tökéletes, ha $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám.

Megoldás: Ha a $p = 2^k - 1$ szám prímszám, akkor az $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ szám osztói: $1, 2, 4, \cdots, 2^{k-1}$, és $p, 2p, 4p, \cdots, 2^{k-1}p$.
Számoljuk az osztók összegét: $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, illetve
$p + 2p + 4p + \cdots + 2^{k-1}p = (2^k - 1)p$, így az osztók összege
$$2^k - 1 + (2^k - 1)p = (2^k - 1)(1 + p) = (2^k - 1)2^k = 2n$$
Beláttuk, ha $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám, akkor az *n* szám tökéletes.
(Megjegyzés: az osztók összegét számolhattuk volna a $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ összefüggés segítségével is.)

Milyen egy páros tökéletes szám?

Nézzük az $n = 2^t \cdot m$ tökéletes számot, ahol *m* páratlan.

$$\sigma(2^t \cdot m) = \sigma(2^t) \cdot \sigma(m)$$

$$2^{t+1} \cdot m = (2^{t+1} - 1) \cdot \sigma(m)$$

Vonjunk ki *m*-et mindkét oldalból:

$$(2^{t+1} - 1) \cdot m = (2^{t+1} - 1) \cdot \sigma(m) - m$$

Azaz:

$$m = (2^{t+1} - 1) \cdot [\sigma(m) - m]$$

A második tényező $[\sigma(m) - m] = d$ osztója *m*-nek, és az első tényező nagyobb 1-nél (legalább $2^2 - 1 = 3$), így a *d* osztó *m*-nél kisebb.

$d + m = [\sigma(m) - m] + m = \sigma(m)$, a bal oldali összeg tehát kiadja m osztóinak összegét, ezért csak $[\sigma(m) - m] = d = 1$ lehet. Tehát *m* prím. $m = 2^{t+1} - 1$ prím, és a keresett páros tökéletes szám $n = 2^t(2^{t+1} - 1)$ alakú, ahol $2^{t+1} - 1$ prímszám.

9. Mutassa meg, hogy a páros tökéletes számok utolsó számjegye 6 vagy 8.

Megoldás: Mivel *n* páros, így $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Itt nézzük a két tényező utolsó számjegyét, és használjuk, hogy *k* prím, azaz páratlan (kivéve a 2).

10. Mutassa meg, ha az *n* tökéletes szám mindkét szomszédja prímszám, akkor $n = 6$.

Megoldás: Mivel *n* páros tökéletes szám, így $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Itt *k* páratlan. Nézzük ezeket. Indukcióval láthatjuk, hogy $n + 1$ osztható 3-mal.

11. Van-e olyan 6-nál nagyobb tökéletes szám, amely osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel?

Megoldás: Ha az *n* tökéletes szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, akkor ha *d* osztója az *n* számnak és *d* nem osztható 3-mal, akkor $3d$ is osztója *n*-nek. Így *n* osztói $(d, 3d)$ párokba rendezhetők, és $d + 3d = 4d$ osztható 4-gyel, tehát *n* osztóinak összege osztható 4-gyel. Az osztók összege $2n$ (hiszen *n* tökéletes szám), ez osztható 4-gyel, így *n* páros szám.

Az *n* páros szám osztható 3-mal, $n = 6k$ alakú, és 6-nál nagyobb, ezért $k > 1$. Az *n* osztói között vannak az $6k, 3k, 2k, k, 1$ számok, ám már ezek összege is $12k + 1 = 2n + 1 > 2n$, tehát az *n* nem lehet tökéletes szám.

Megjegyzés: 3 helyett 7-tel ugyanez eljátszható.

12. Melyek azok a tökéletes számok, melynek prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám?

Megoldás: Belátjuk, hogy egy ilyen szám van, a 6.

Ha a keresett *n* tökéletes szám páros, akkor $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám. Tudjuk, hogy ekkor *k* is prím. Ha ez a prím páratlan, akkor a 2 kitevője páros. Tehát a páros *n* tökéletes szám prímtényezős felbontásában csak akkor lehet minden prím kitevője páratlan szám, ha $k = 2$, és ekkor $n = 6$.

Ha a keresett *n* tökéletes szám páratlan, és a prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám, akkor az osztók összegét adó szorzatban minden zárójeles tényező páros szám:

$$(1 + p + \cdots + p^{\alpha}) \cdot (1 + q + \cdots + q^{\beta}) \cdot (1 + r + \cdots + r^{\gamma}) \cdot \cdots \cdot (1 + s + \cdots + s^{\delta})$$

Ez a szorzat a páratlan tökéletes szám 2-szerese, tehát nem osztható 4-gyel, így csak egy tényezőből állhat a szorzat. A keresett páratlan tökéletes szám csak $n = p^{\alpha}$ alakú lehet. Azonban $1 + p + \cdots + p^{\alpha} = 2p^{\alpha}$ egyenletnek nincs megoldása, hiszen

$1 + p + p^2 + \cdots + p^{\alpha} = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \frac{p^{\alpha+1}}{p-1} < 2p^{\alpha}$, mivel $\frac{p}{p-1} < 2$, mert $p > 2$.

Tehát a keresett tökéletes szám nem lehet páratlan.

Másképp megoldva: Ha *p* prím osztója *n*-nek, és *x* olyan osztója *n*-nek, amely nem osztható *p*-vel, akkor az osztókat párokba rendezhetjük: $(x, px), (p^2x, p^3x), \cdots, (p^{2k}x, p^{2k+1}x)$.

Tehát az osztók összege osztható $p + 1$-gyel, hiszen ez teljesül minden párban a két osztó összegére.

Válasszuk p-nek az n legkisebb prímosztóját, így a $p + 1|2n$ oszthatóságból következtethetünk arra, hogy $p = 2$.

Ekkor 3 is osztója *n*-nek, tehát $n = 6k$.

Ha $k > 1$, akkor az $n = 6k$ számnak különböző osztói $1, k, 2k, 3k, 6k$ (használtuk a $k > 1$ feltételt), ezek összege $12k + 1 > 2n$, tehát *n* nem tökéletes.

Egy lehetőség maradt: $k = 1$, ekkor $n = 6$ tökéletes.

13. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan tökéletes szám 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

Megoldás: Egy prímszám nem lehet tökéletes szám. Az n páratlan szám összes osztója páratlan, az osztók $1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_m < n$. Az n-nél kisebb osztók összege páratlan, emiatt m páros, $m = 2k$.

A (d_1, d_m), (d_2, d_{m-1}), … osztópárokban a két társosztó szorzata n. A $d_1, d_2, \cdots, d_m$ osztók mind szerepelnek ezekben a párokban, hiszen m páros.

Tegyük fel, hogy $n = 4N + 3$ alakú. Ebben az esetben a társosztók egyike $4a + 1$, a másik $4b + 3$ alakú, hiszen ezek szorzata $4N + 3$ alakú szám, míg két $4a + 1$ alakú szám szorzata $4N + 1$ alakú, és két $4a + 3$ alakú szám szorzata is $4N + 1$ alakú. Tehát, ha a páratlan tökéletes szám $n = 4N + 3$ alakú, akkor a társosztók egyike $4a + 1$, a másik $4b + 3$ alakú, ezek összege 4-gyel osztható. Így a $d_1, d_2, \cdots, d_m$ osztók összege 4-nek többszöröse, az $1, d_1, d_2, \cdots, d_m$ osztók összege $4M + 1$ alakú, tehát az nem egyezhet meg az $n = 4N + 3$ számmal. Azt kaptuk, hogy egy páratlan tökéletes szám nem lehet $4N + 3$ alakú.

14. Mutassuk meg, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább három különböző prímosztója van.

Megoldás: Van-e olyan páratlan tökéletes szám, amelynek csak egy prímosztója van?

Ha az $n = p^\alpha$ alakú szám tökéletes, akkor $\sigma(n) = 2n$, azaz $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$.

Mivel $\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$, és $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha \cdot (p-1)} < \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha \cdot (p-1)} = \frac{p}{p-1} \le \frac{3}{2}$, így $\frac{\sigma(n)}{n} < 2$, az n szám nem lehet tökéletes.

Van-e olyan páratlan tökéletes szám, amelynek két prímosztója van?

Ha az $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ alakú szám tökéletes, akkor $\sigma(n) = 2n$.

Ekkor $\sigma(n) = (1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha) \cdot \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^\beta\right)$.

Innen $\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}$.

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha \cdot (p-1)} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q^\beta \cdot (q-1)} < \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha \cdot (p-1)} \cdot \frac{q^{\beta+1}}{q^\beta \cdot (q-1)} = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2.$$

$\frac{\sigma(n)}{n} < 2$, ezért n nem lehet tökéletes.

Ezek miatt egy páratlan tökéletes számnak legalább három különböző prímosztója van.

Megjegyzés. Vajon az előbbi gondolatsorral beláthatjuk-e, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább négy különböző prímosztója van?

15. Mutassuk meg, hogy nincs olyan páratlan tökéletes szám, amely osztható a 3, 5 és 7 prímekkel, azaz 105-tel.

Megoldás: Legyen $n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot \dots \cdot s^\delta$, ahol p, q, r, …, s páratlan prímek, és tegyük fel, hogy közöttük ott vannak a 3, 5 és 7 prímek, továbbá n tökéletes szám: $\sigma(n) = 2n$, azaz

$$2n = (1 + p + \dots + p^\alpha) \cdot (1 + q + \dots + q^\beta) \cdot (1 + r + \dots + r^\gamma) \cdot \dots \cdot (1 + s + \dots + s^\delta).$$

A zárójeles tényezők között pontosan egy páros van, ezért az $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \delta$ kitevők között pontosan egy páratlan, a többi páros. Legyen $\alpha = 2k + 1$.

$1 + p | (1 + p) + \dots + (p^{2k} + p^{2k+1})$, emiatt ha $p = 3$ vagy $p = 7$, akkor $p + 1$ osztható 4-gyel, azaz $2n$ is osztható 4-gyel, ami nem lehet, hiszen n páratlan. Tehát csak $p = 5$ lehet.

$2n = \sigma(n)$-ből $2 = \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^\beta}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{s} + \dots + \frac{1}{s^\delta}\right)$, és tekintettel arra, hogy α kivételével a kitevők párosak: $2 \geq \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right)\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$, és $p = 5$, $q = 3$, $s = 7$, azaz $2 \geq \left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49}\right) = \frac{6 \cdot 13 \cdot 57}{5 \cdot 9 \cdot 49} > 2$, ez ellentmondás.

Igazoltuk az állítást.

16. Mutassuk meg, hogy a páratlan tökéletes számok $n = (4k + 1) \cdot m^2$ alakúak, ahol $4k + 1$ prímszám.

Megoldás: Legyen $n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot \dots \cdot s^\delta$, ahol p, q, r, …, s páratlan prímek, és tegyük fel, hogy n tökéletes szám: $\sigma(n) = 2n$, azaz

$$2n = (1 + p + \dots + p^\alpha) \cdot (1 + q + \dots + q^\beta) \cdot (1 + r + \dots + r^\gamma) \cdot \dots \cdot (1 + s + \dots + s^\delta).$$

A zárójeles tényezők között pontosan egy páros van (és ez nem osztható 4-gyel), ezért az $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \delta$ kitevők között pontosan egy páratlan, legyen $\alpha = 2a + 1$, a többi páros.

Ezért $n = p^{2a+1} \cdot q^{2b} \cdot r^{2c} \cdot \dots \cdot s^{2d} = p \cdot p^{2a} \cdot q^{2b} \cdot r^{2c} \cdot \dots \cdot s^{2d} = p \cdot m^2$.

$1 + p | (1 + p) + \dots + (p^{2a} + p^{2a+1})$, így ha $p = 4k - 1$, akkor $1 + p$ osztható 4-gyel, emiatt $1 + p + \dots + p^\alpha$ is osztható 4-gyel, ami nem lehet.

Tehát $p = 4k - 1$ nem lehet, marad a $p = 4k + 1$ lehetőség.

17. ***a)*** Az *n* szám osztóinak összegét $\sigma(n)$ jelöli: $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Lássuk be, hogy

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$$

b) Mutassuk meg, hogy egy tökéletes szám osztóinak reciprokait összeadva 2-t kapunk, azaz ha *n* tökéletes, akkor $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$, azaz $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$.

c) Lássuk be, hogy van olyan *n* egész, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > 10$.

d) Igazoljuk, hogy ha $m|n$, akkor $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(m)}{m}$.

e) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan *n* szám van, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m}$, ha $n > m$.

Megoldás: ***a)*** Az osztó-társosztó párosítás alapján látjuk az egyenlőséget.

b) Gondoljunk az ***a)*** feladatra.

c) Ha $n = m!$, akkor az *n* számnak (többek között) osztói az 1, 2, 3, …, *m* számok, így $\frac{\sigma(n)}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$, és ez az összeg tetszőlegesen nagy lehet.

d) Az ***a)*** feladat szerint $\frac{\sigma(n)}{n}$ az *n* szám osztói reciprokának összege, és az összegek közötti egyenlőtlenség jó látszik.

e) Keressünk a $\frac{\sigma(n)}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$ sorozatban – amely a ***c)*** indoklása alapján felülről nem korlátos sorozat – lokális csúcsokat, olyan csúcsot, mely magasabb, mint az őt megelőző csúcsok.

Megjegyzés. Tudjuk, hogy a $\frac{\sigma(n)}{n}$ értékek mindenütt sűrűn helyezkednek el az 1-nél nagyobb számok körében.

Ha $\frac{\sigma(n)}{n}$ értéke valamely *n*-re $\frac{5}{3}$ lenne, akkor volna páratlan tökéletes szám, és ez az $5n$. Erről szól a következő feladat.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{5}{3}$, akkor $5n$ páratlan tökéletes szám. (Weiner, 2000)

Megoldás: Az $5n$ szám tökéletes, ha $\frac{\sigma(5n)}{5n} = 2$. Teljesül ez?

Ha a és b relatív prímek, akkor $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, így ha n nem osztható 5-tel, akkor használhatjuk a $\sigma(5n) = \sigma(5) \cdot \sigma(n)$ összefüggést.

$$\frac{\sigma(5n)}{5n} = \frac{\sigma(5) \cdot \sigma(n)}{5n} = \frac{\sigma(5)}{5} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$$

Tehát igazoltuk az állítást, ha belátjuk, hogy n nem osztható 5-tel és n páratlan (hiszen $5n$ páratlan).

Mivel $3\sigma(n) = 5n$, így $3|n$.

Ha n páros, akkor $6|n$. Tudjuk, ha $m|n$, akkor $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(m)}{m}$. Ezért $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(6)}{6} = 2$, ám ez nem lehet, hiszen $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{5}{3}$. Tehát n páratlan, és az előbbi egyenlőség miatt $\sigma(n)$ is páratlan.

Ha n páratlan és $\sigma(n)$ is páratlan, akkor n négyzetszám. (Hiszen n minden osztója páratlan, és az osztók összege páratlan, akkor az osztók száma páratlan. Egy szám osztóinak száma pontosan akkor páratlan, ha a szám négyzetszám. Ezt igazoltuk a **3.b)** megoldásában is.)

Az n szám négyzetszám és $3|n$, ezért $9|n$.

Az n szám nem osztható 5-tel. Ha mégis, akkor $9 \cdot 5|n$, így $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(9 \cdot 5)}{9 \cdot 5} = \frac{78}{45} = \frac{26}{15} > \frac{5}{3}$, ez ellentmond annak, hogy $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{5}{3}$. Tehát n nem osztható 5-tel (és páratlan).

Célba értünk.

Miért nem tökéletes?

(1) 12345

(2) 1234567

(3) $3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^8$

(4) $5^6 \cdot 7^7 \cdot 11^8$

(5) $p^5 \cdot q^6$, ahol p és q prímek, és $|p-q| = 2$

(6) $2\,812\,644\,884\,765\,625$

Megoldás. Belátjuk a következő állítást: ***Ha az n páratlan szám osztható 3-mal, és nem osztható 9-cel, akkor nem lehet tökéletes.*** Ugyanis ha *d* osztója a *n* számnak és *d* nem osztható 3-mal, akkor $3d$ is osztója n-nek. Így n osztói $(d, 3d)$ párokba rendezhetők, és $d + 3d = 4d$ osztható 4-gyel, tehát *n* osztóinak összege osztható 4-gyel. Azonban a páratlan tökéletes szám osztóinak összege a szám 2-szerese, azaz 2-vel osztható, ám 4-gyel nem. Ezért az *n* páratlan szám nem lehet tökéletes. (Lásd még a 11. feladatot.)

Ezért az (1) és a (6) alatti számok egyike sem tökéletes. (A (6) alatti szám számjegyeinek összege 78. Tehát a szám osztható 3-mal, de 9-cel nem.)

A (6) alatti szám prímtényezős alakja: $2\,812\,644\,884\,765\,625 = 3 \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 13^4$.

A (2) alatti szám $4k+3$ alakú, így a 13. feladat szerint nem lehet tökéletes.

A (3) alatti szám négyzetszám, ami a 6. feladat szerint nem lehet tökéletes.

A (4) alatti szám a 16. feladat miatt nem lesz tökéletes.

Az (5) alatti szám a 14. feladat szerint nem lehet tökéletes.